PART4　等差数列の和

要点 ①　等差数列の和

初項 1，公差 3，項数 8 の等差数列の初項から第 8 項までの和を求める。

求める和を S とすると

$$S=1+4+7+10+13+16+19+22 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

である。

この和 S は，加える項の順番を逆にしても同じである。つまり

$$S=22+19+16+13+10+7+4+1 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

である。①と②を辺々加えると

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+\ 4+\ 7+10+13+16+19+22 \\ +) & S= & 22+19+16+13+10+\ 7+\ 4+\ 1 \\ \hline & 2S= & \quad+\quad+\quad+\quad+\quad+\quad+\quad+\quad \end{array}$$

よって　$2S=23\times\quad$　$\cdots\cdots$　③　より　$S=\dfrac{23\times 8}{2}=92$

③における 8 は「項数」であり，23 は「初項」1 と第 8 項 22 の和である。第 8 項は，この等差数列の「末項」である。

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項を　とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\quad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+\quad \quad \cdots\cdots \quad ④$$

④の右辺の項の順番を逆にすると

$$S_n=\quad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+\quad \quad \cdots\cdots \quad ⑤$$

④と⑤を辺々加えると

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & \qquad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+\quad \\ +) & S_n= & \qquad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+\quad \\ \hline & 2S_n= & (a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)=(a+l) \end{array}$$

よって $S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$

また，末項 l は第 n 項であるから　$l=a+(n-1)d$

よって $S_n=\dfrac{1}{2}n\{a+a+(n-1)d\}=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

したがって，次の公式が成り立つ。

等差数列の和

初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

$$=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

例 初項 2，末項 20，項数 7 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2}\cdot\ \ \cdot(\ \ +\ \ )=77$$

初項 −1，公差 3，項数 12 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2}\cdot\ \ \cdot\{2\cdot\ \ \ +(\ \ -1)\cdot\ \ \}=186$$

4 ⑴ 初項 29，末項 1，項数 8 の等差数列の和 S を求めよ。

⑵(i) 初項 1，公差 2，項数 20 の等差数列の和 S を求めよ。

(ii) 初項 2，公差 5 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

Point Pickup

等差数列の和

初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l) \quad \cdots\cdots \quad \frac{1}{2}\times項数\times(初項+末項)$$

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\} \quad \cdots\cdots \quad \frac{1}{2}\times項数\times(初項+第\ n\ 項)$$

第 1 講　PART4 確認問題

1 初項5，末項15，項数8の等差数列の和は アイ である。

2 初項1，公差3，項数10の等差数列の和は ウエオ である。

3 初項 -4，公差6の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = n(\boxed{\text{カ}}\,n - \boxed{\text{キ}})$$

である。

PART4 等差数列の和

4 (1) 初項 29，末項 1，項数 8 の等差数列の和 S を求めよ。

(2)(i) 初項 1，公差 2，項数 20 の等差数列の和 S を求めよ。

(ii) 初項 2，公差 5 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[解答]

(1) $S=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot(29+1)=120$

(2)(i) $S=\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot\{2\cdot 1+(20-1)\cdot 2\}=400$

(ii) $S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 5\}=\dfrac{1}{2}n(5n-1)$

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：80

[解説]

初項 5，末項 15，項数 8 の等差数列の和 S は，

$$S=\frac{8(5+15)}{2}=\mathbf{80}$$ [A]

[A]　初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

2

[正解] ウエオ：145

[解説]

初項 1，公差 3，項数 10 の等差数列の和 S は，

$$S=\frac{10\{2\cdot1+(10-1)\cdot3\}}{2}$$ [B]

$$=5\times29=\mathbf{145}$$

[B]　初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

3

[正解] カ：3，キ：7

[解説]

初項 -4，公差 6，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-4)+(n-1)\cdot6\}$$ [C]

$$=\frac{n}{2}(6n-14)$$

$$=\boldsymbol{n(3n-7)}$$

[C]　初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$